

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE LINEAS DE ESPERA

La teoría de colas es el estudio matemático del comportamiento de líneas de espera. Esta se presenta, cuando los “clientes” llegan a un “lugar” demandando un servicio a un “servidor”, el cual tiene una cierta capacidad de atención. Si el servidor no está disponible inmediatamente y el cliente decide esperar, entonces se forma la línea de espera.

La teoría de colas estudia modelos matemáticos que describen sistemas de línea de espera con diferentes características. Los modelos nos ayudan a encontrar un equilibrio entre los costos del sistema y los tiempos promedio de la línea de espera para un sistema dado.

Algunos estudio han llegado a la conclusión que, por término medio, un ciudadano promedio pasa cinco años de su vida esperando en distintas colas, y de estos cinco años casi seis meses esperando que cambie la luz en los semáforos (claro aquellos que respetan los semáforos).

INVESTIGACION DE OPERACIONES: MODELO DE LINEAS DE ESPERA

ALGO DE HISTORIA:

El origen de la Teoría de Colas, según el enfoque actual, lo encontramos en los trabajos de Agner Kraup Erlang (Dinamarca 1878 - 1929) en 1909 para analizar el tráfico telefónico o la congestión de llamadas, con el objetivo de cumplir la demanda incierta de servicios en el sistema telefónico de Copenhague. Sus investigaciones acabaron en una nueva teoría denominada teoría de colas o de líneas de espera. Esta teoría paso a ser una herramienta muy importante en simulación y ayudó a solucionar muchos problemas prácticos que tenían como característica llegadas y salidas.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE LINEAS DE ESPERA

DEFINICIONES BÁSICAS:

PROCESO DE COLAS: Los clientes que requieren un servicio se forman en una fase de entrada. Estos clientes entran al sistema y se unen a una cola. Llegado el momento se selecciona un cliente de la cola, para recibir la prestación del servicio, que se hace según alguna regla conocida como disciplina de servicio. Luego, se realiza el servicio requerido por el cliente en un servidor o mecanismo prestador del correspondiente servicio, finalmente el cliente sale del sistema de colas.

FUENTE DE ENTRADA LLEGADA O POBLACIÓN POTENCIAL: Una característica de la fuente de entrada es su tamaño. El tamaño es el número total de clientes que pueden requerir servicio en determinado momento. Puede suponerse que el tamaño es infinito o finito.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE LINEAS DE ESPERA

CLIENTE: Es todo individuo, entidad o elemento de la población potencial que solicita servicio, por ejemplo llamadas telefónicas que esperan ser atendidas, vehículos que esperan cargar gasolina, pacientes que esperan atención hospitalaria, etc.

CAPACIDAD DE LA COLA: Es el máximo número de clientes que pueden estar haciendo cola (antes de comenzar a ser servidos). Puede suponerse finita o infinita.

INSTALACIÓN O MECANISMO DE SERVICIO: La instalación de servicio consiste en uno o más canales paralelos de servicio, llamados servidores.

REDES DE COLAS. Sistema donde existen varias colas y los trabajos fluyen de una a otra. Por ejemplo: las redes de comunicaciones o los sistemas operativos multitarea.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: MODELO DE LINEAS DE ESPERA

DISCIPLINA DE SERVICIO: La disciplina de servicio se refiere al orden en el que se seleccionan los clientes de la cola para recibir el servicio. Por ejemplo, puede ser:

PEPS (Primero en Entrar Primero en Salir, también conocida como FIFO: first in first out) primero en entrar, primero en salir, según la cual se atiende primero al cliente que haya llegado de primero.

UEPS (Ultimo en Entrar Primero en Salir, también conocida como LIFO: last in first out) también se conoce como pila, consiste en atender primero al cliente que ha llegado de último.

SOA (Servicio en Orden Aleatorio, también se conoce como SIRO o RSS: random selection of service) que selecciona los clientes de manera aleatoria, de acuerdo a algún procedimiento de prioridad o a algún otro orden.

PRIORIDAD en el servicio: Los clientes se atienden de primero de acuerdo a alguna prioridad especificada. Si se forma alguna cola con prioridad, seguirá alguna disciplina de servicio.

Procesamiento equilibrado o igualitario, también llamado Processor Sharing: Sirve a todos los clientes por igual. La capacidad del sistema se comparte entre los clientes y todos experimentan el mismo retraso.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: MODELO DE LINEAS DE ESPERA

COLA: Es otra denominación de las líneas de espera, también se llaman filas. Una cola se caracteriza por el número máximo de clientes que puede admitir. Las colas pueden ser finitas o infinitas.

CANALES MÚLTIPLES: Instalación de servicio con dos o más servidores en paralelo.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: Se utiliza en algunos modelos de cola para describir el patrón de los tiempos de servicios.

DISTRIBUCIÓN POISSON: Se utiliza para describir el proceso aleatorio de llegadas en algunos modelos de línea de espera.

PERÍODO DE ESTADO ESTABLE: Es el período que sigue al inicio o transición, durante este período el modelo se comporta de acuerdo a las características operacionales del modelo. Los estadísticos o características se calculan para el estado estable.

PERÍODO DE TRANSICIÓN: Ocurre al comenzar a funcionar un sistema de línea de espera y antes de alcanzar un comportamiento normal. Durante este período las características operacionales o estadísticos del modelo no son válidos.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: MODELO DE LINEAS DE ESPERA

TASA PROMEDIO DE LLEGADAS: Número promedio de clientes que llegan en un intervalo de tiempo determinado.

TASA PROMEDIO DE SERVICIO: Número promedio de clientes que pueden recibir servicio en un servidor durante un período de tiempo determinado.

FUENTE O POBLACIÓN DE LLAMADA FINITA: Es el supuesto de que la fuente o población de donde provienen los clientes para solicitar un servicio, es finita.

FUENTE O POBLACIÓN DE LLAMADA INFINITA: Es el supuesto de que la fuente o población de donde provienen los clientes para solicitar un servicio, es infinita o no tiene un límite superior especificado.

BLOQUEO: Condición que no permite agregar más clientes a la línea de espera, debido a que el sistema está lleno, esto puede suceder cuando las colas tienen capacidad finita.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

NOTACIÓN DE KENDALL

David G. Kendall introdujo una notación para los modelos de líneas de espera: $A/B/C$ en 1953. Esta notación de Kendall para describir las colas y sus características se puede encontrar en Tijms, H.C., *Algorithmic Analysis of Queues*, Capítulo 9 en *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, Chichester, 2003. Ha sido desde entonces extendida a $(A/B/C/):(D/E/F)$ donde las letras pueden significar:

A: Un parámetro que describe el proceso de llegada. Algunos utilizados son:

M para par Markoviano (la tasa de llegadas sigue una distribución Poisson), lo que significa una distribución exponencial para los tiempos entre llegadas. Las distribuciones Markovianas, en honor al matemático A.A. Markov quien identificó los eventos "sin memoria", se utiliza para describir procesos aleatorios, es decir, aquellos de los que puede decirse que carecen de memoria acerca de los eventos pasados.

D para unos tiempos entre llegadas "deterministas". Una distribución determinista es aquella en que los sucesos ocurren en forma constante y sin cambio.

G para una "distribución general" de los tiempos entre llegadas. La distribución general sería cualquier otra distribución de probabilidad.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

NOTACIÓN DE KENDALL

B: Describe el tiempo que dura el servicio, se usan parámetros similares a los utilizados para las llegadas. Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

C: Representa el número de servidores.

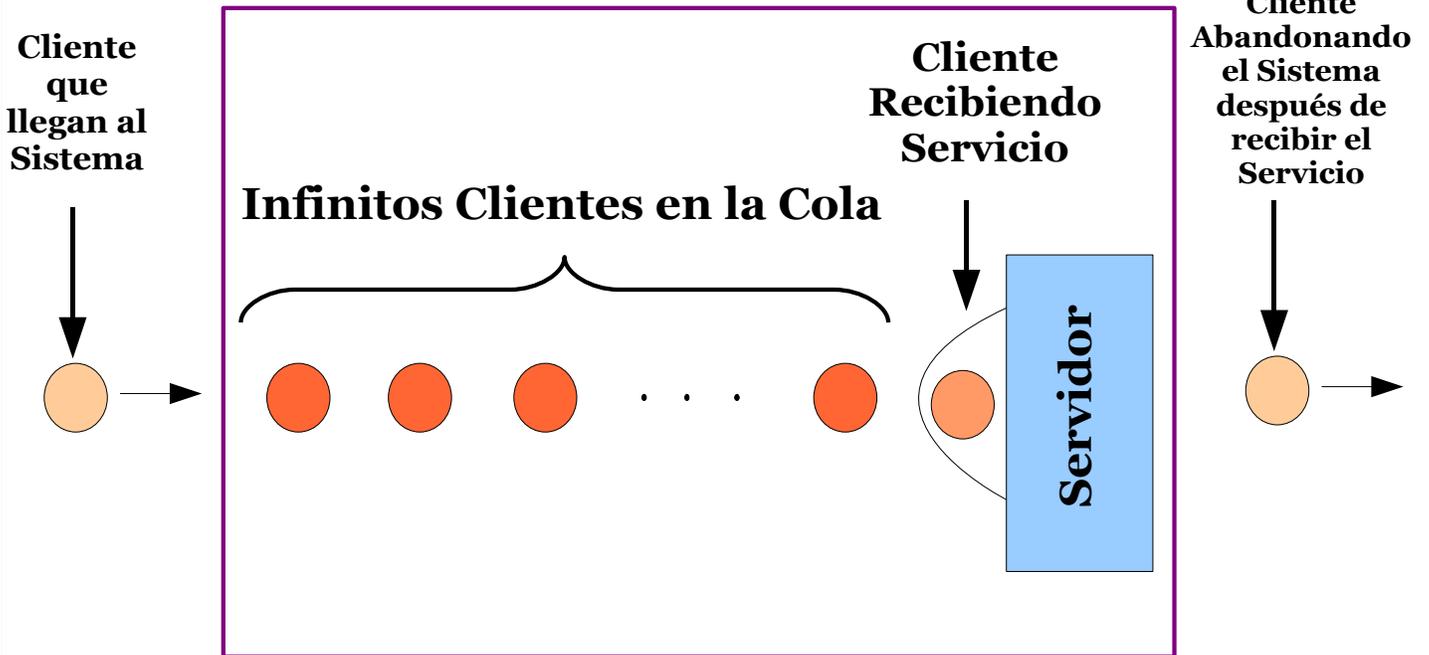
D: Representa la capacidad del sistema, o el número máximo de clientes permitidos en el sistema incluyendo los que reciben servicio. Cuando el número está al máximo, las llegadas siguientes son rechazadas.

E: Disciplina en el servicio.

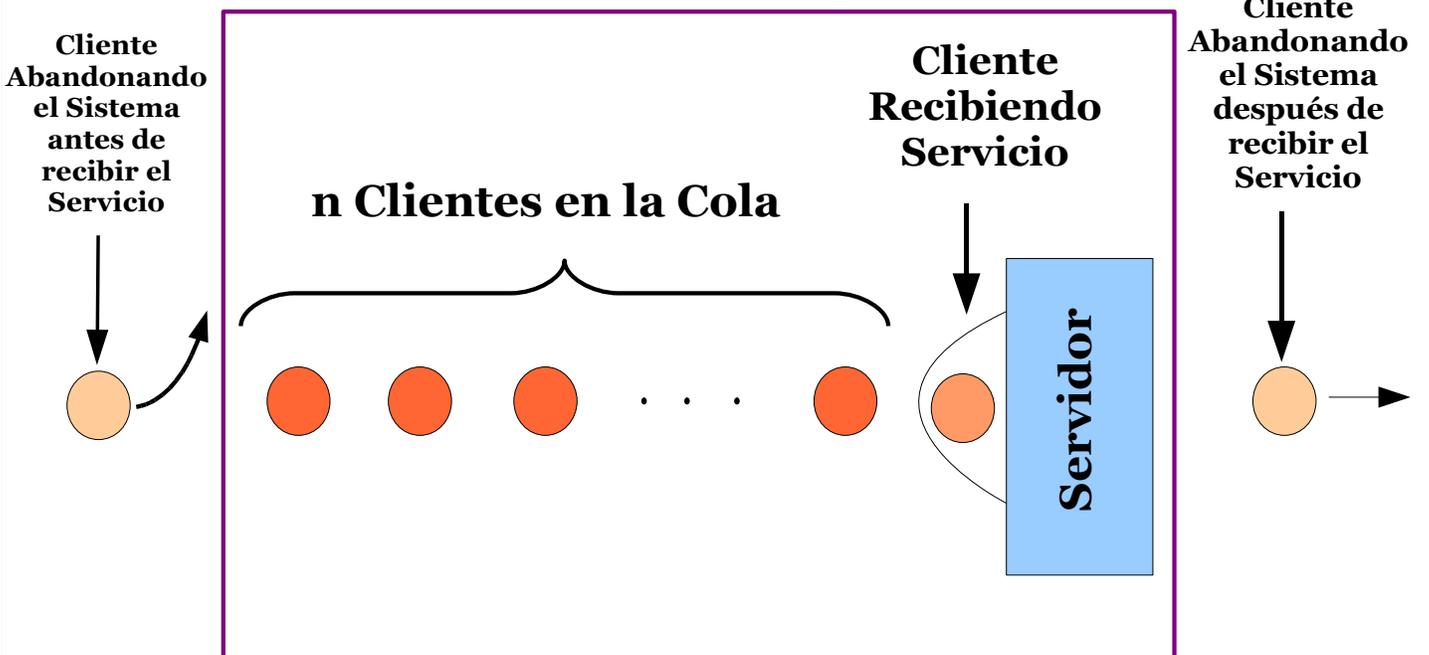
F: Especifica el tamaño de la población de los que provienen los elementos que ingresan al sistema de líneas de espera, también se denomina fuente de llamada.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: LINEAS DE ESPERA CON COLA INFINITA Y COLA LIMITADA, UN SOLO SERVIDOR

Sistema de Linea de Espera



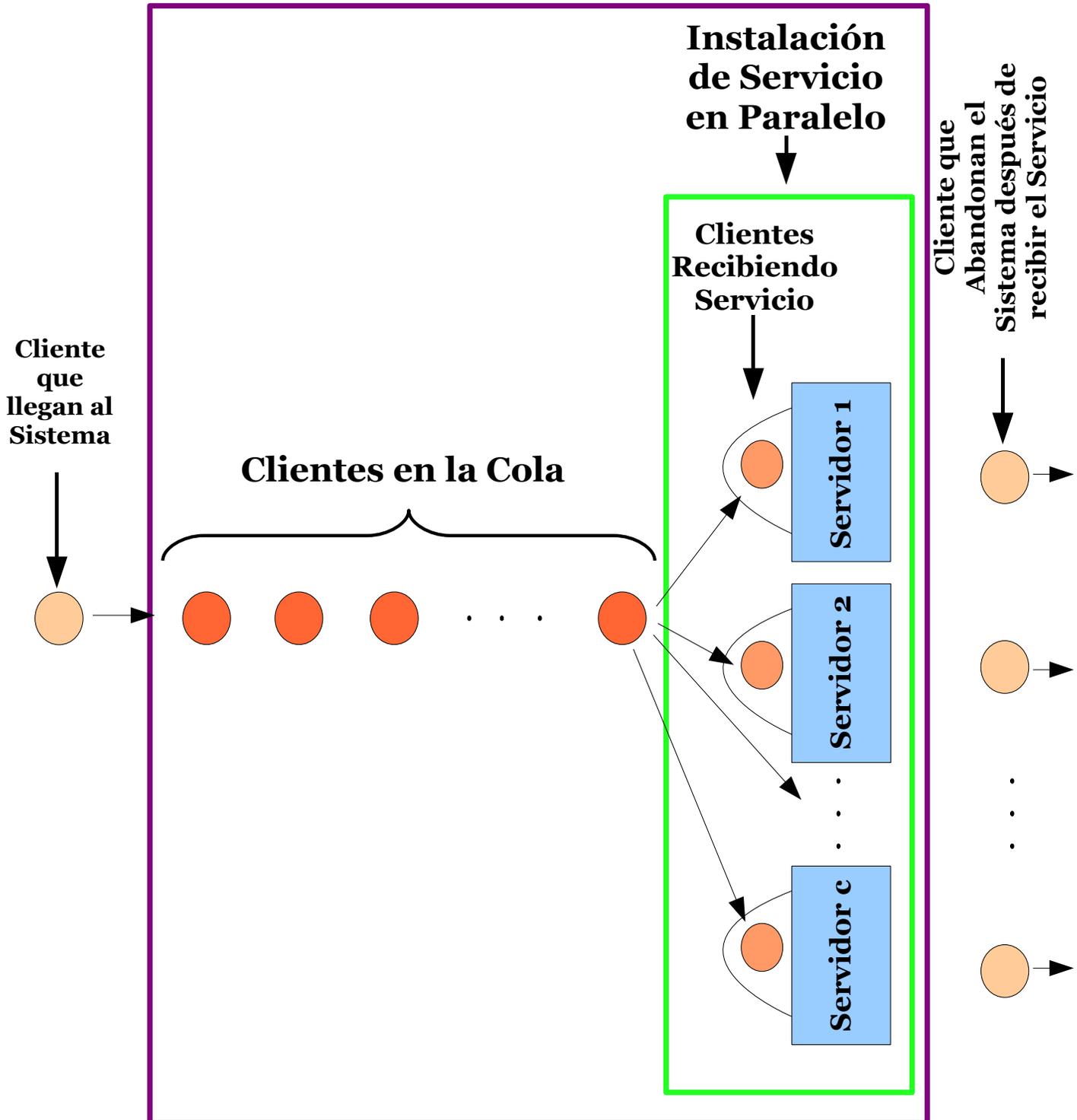
Sistema de Linea de Espera



INVESTIGACION DE OPERACIONES:

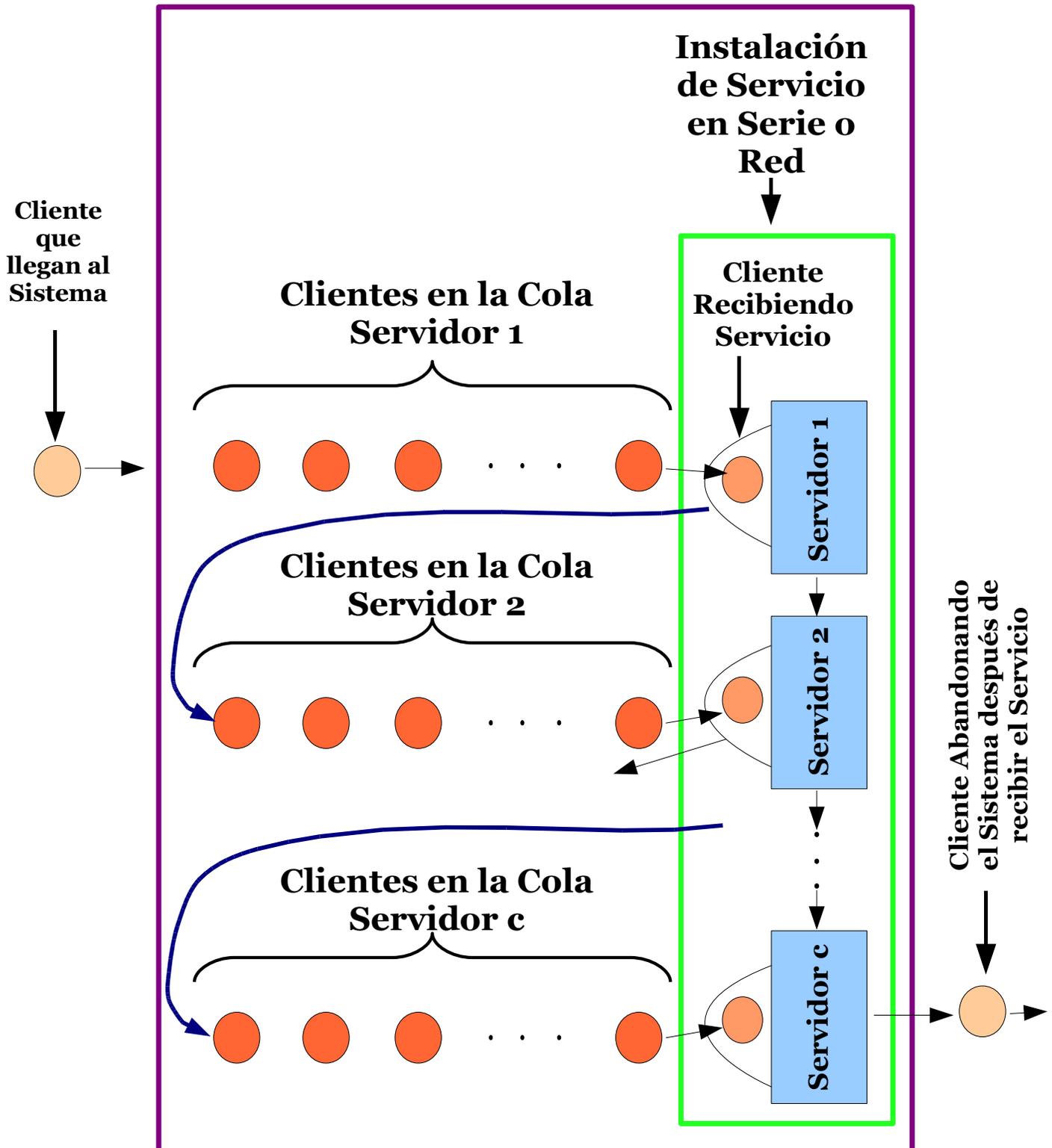
LINEAS DE ESPERA CON C SERVIDORES EN PARALELO

Sistema de Linea de Espera



INVESTIGACION DE OPERACIONES: LINEAS DE ESPERA CON C SERVIDORES EN SERIE

Sistema de Linea de Espera



INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE COLA: M/M/1

Cuando suponemos que la disciplina en el servicio es primero que llega es el primero en recibir servicio y tanto el tamaño máximo de la cola como la población de donde provienen los clientes son suficientemente grandes para considerarse infinitos, entonces se simplifica la notación a M/M/C. Un caso particular es el modelo M/M/1, en este modelo tenemos:

M: Distribución de llegadas Markovianas (Poisson)

M: Distribución del tiempo de servicio Markoviana (Exponencial)

1: Un solo servidor.

LLEGADAS:

Las llegadas se suponen que siguen una distribución Poisson, con dos características muy importantes:

1) Completa independencia en las llegadas, entre si y con respecto al estado general del sistema.

2) Las llegadas no dependen de cuando ocurre el período, sino de la longitud de este. Esto significa que no existe memoria, por lo cual estos procesos también se llaman de nacimiento puro.

$$P[n \text{ llegadas en el tiempo } T] = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!}$$

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE COLA: M/M/1

SALIDAS:

Las salidas se suponen que siguen una distribución exponencial, con iguales características que la distribución Poisson, el proceso de salida también recibe el nombre de muerte pura.

$$f(t) = \mu e^{-\mu T}$$

$$P[\text{el servicio se tarda más que } T] = P(t > T)$$

$$P(t \leq T) = 1 - e^{-\mu T}$$

$$P(t > T) = e^{-\mu T}$$

$$P(t > T) = 1 - P(t \leq T)$$

INVESTIGACION DE OPERACIONES: CARACTERÍSTICAS MODELO M/M/1.

Tasa promedio de llegadas:

$$\lambda$$

Tasa promedio de servicio (número promedio de servicios por período):

$$\mu$$

Probabilidad que un cliente tenga que esperar:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Número Promedio de clientes en la Cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad L_q = \lambda W_q$$

INVESTIGACION DE OPERACIONES: CARACTERÍSTICAS MODELO M/M/1.

Probabilidad de n clientes en el sistema:

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \qquad P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Numero promedio de clientes en el Sistema:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad L_s = \lambda W_s$$

Tiempo Promedio que pasa un cliente en el Sistema:

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Tiempo Promedio que pasa un cliente en la Cola:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Número Promedio de clientes en la Cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad L_q = \lambda W_q$$

INVESTIGACION DE OPERACIONES: SIMULACIÓN.

SIMULACIÓN DE SISTEMAS:

Mediante la simulación se trata de obtener unas características del sistema, que de otra manera sería imposible o demasiado complejo para obtenerlas mediante una modelación matemática. La simulación no ofrece soluciones óptimas, pero si permite tener una aproximación razonable sobre el comportamiento del sistema, de tal manera que se pueda tomar una decisión ajustada a los objetivos propuestos.

En la actualidad la simulación es posible gracias a la existencia de la herramienta computacional que dan los ordenadores o computadores.

CONCEPTOS BÁSICOS:

NÚMERO SEUDOALEATORIO: Son números generados en el computador mediante un programa que utiliza funciones o expresiones matemática complejas, estos número tienen las mismas propiedades de los números aleatorios.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: SIMULACIÓN.

CONCEPTOS BÁSICOS:

SIMULACIÓN DE MONTECARLO: Este tipo de simulación utiliza números aleatorios o pseudoaleatorios para generar los valores de las variables aleatorias con la finalidad de calcular las características o estadísticos del sistema que se está simulando.

SIMULADOR: Programa de computador utilizado para realizar las simulaciones.

CONNECTIVO LÓGICO “SI ENTONCES”: Modificaciones que se hacen en los parámetros del modelo para observar los resultados o efectos sobre las características o estadísticos del sistema simulado.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA: Es el ordenamiento tabular de los datos por clases conjuntamente con las frecuencias o ocurrencia de clases.

INVESTIGACION DE OPERACIONES: SIMULACIÓN.

| Número | Intervalo de Clase (C' - C'') | Marca de Clase Xi | Frecuencia Absoluta fi | Frecuencia Relativa hi |
|--------|----------------------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | C1 - C2 | x1 | f1 | f1/N |
| 2 | C2 - C3 | x2 | f2 | f2/N |
| 3 | C3 - C4 | x3 | f3 | f3/N |
| 4 | C4 - C5 | x4 | f4 | f4/N |
| | | | | |
| | | | | |
| n | Cn-1 - Cn | xn | fn | fn/N |
| | | | $\Sigma fi = N$ | $\Sigma = 1$ |

Proceso de Simulación:

Para simular un sistema se definen los siguientes elementos:

- 1) Distribución para las llegadas.
- 2) Distribución para el tiempo de servicio.
- 3) Tiempo total de simulación.
- 4) Tamaño máximo de la cola.
- 5) Intervalo de tiempo para generar un valor para la variable.
- 6) Parámetros de costo, ganancia, precio, etc.

El valor de las llegadas y salidas se generan mediante simulación de Monte Carlo, después de cada período de simulación se actualizan los estadísticos y se vuelve a simular, hasta que se cumple el tiempo total de simulación.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

SIMULACIÓN.

Simulación

